

ハレルバツノ3相同期モータの $\alpha\beta$ 変換理論

各座標系の理論

三相

静止座標系

- UVW相
- 指令電圧, 測定電圧はこの形式となる

二相

静止座標系

- α 軸および β 軸による表現
- UVWと同じく, 軸の位置はロータの回転によらず静止している

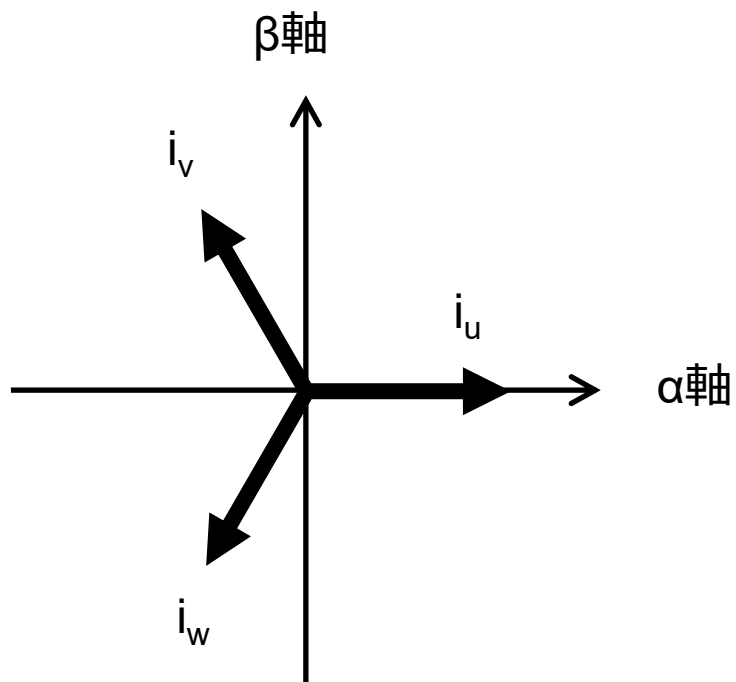
二相

回転座標系

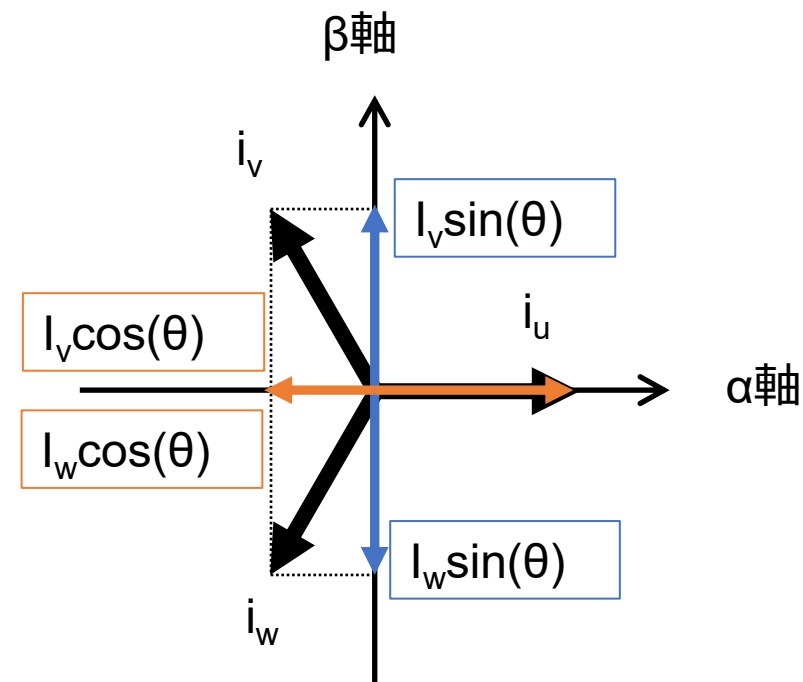
- d軸およびq軸による表現
- ロータの回転速度と同期している

相電流の $\alpha\beta$ 変換

三相静止座標系のベクトル図

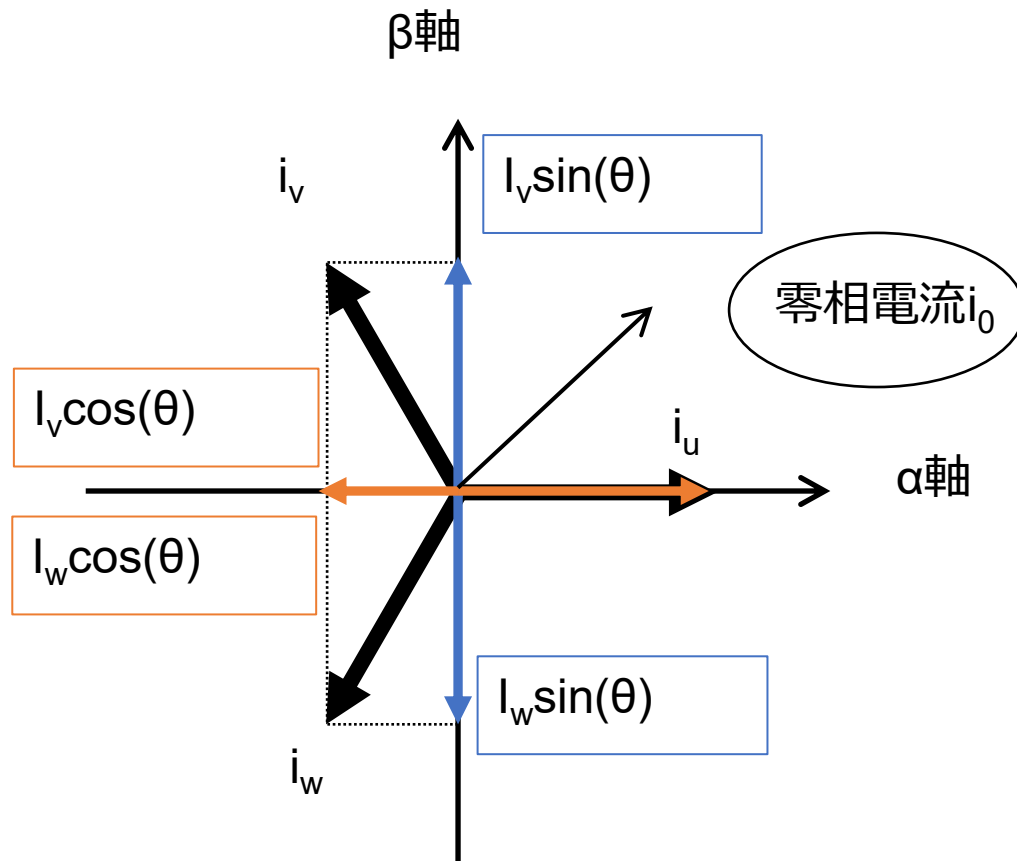


各ベクトルの $\alpha\beta$ 座標系への写像



相電流の $\alpha\beta$ 変換

-零相成分について-



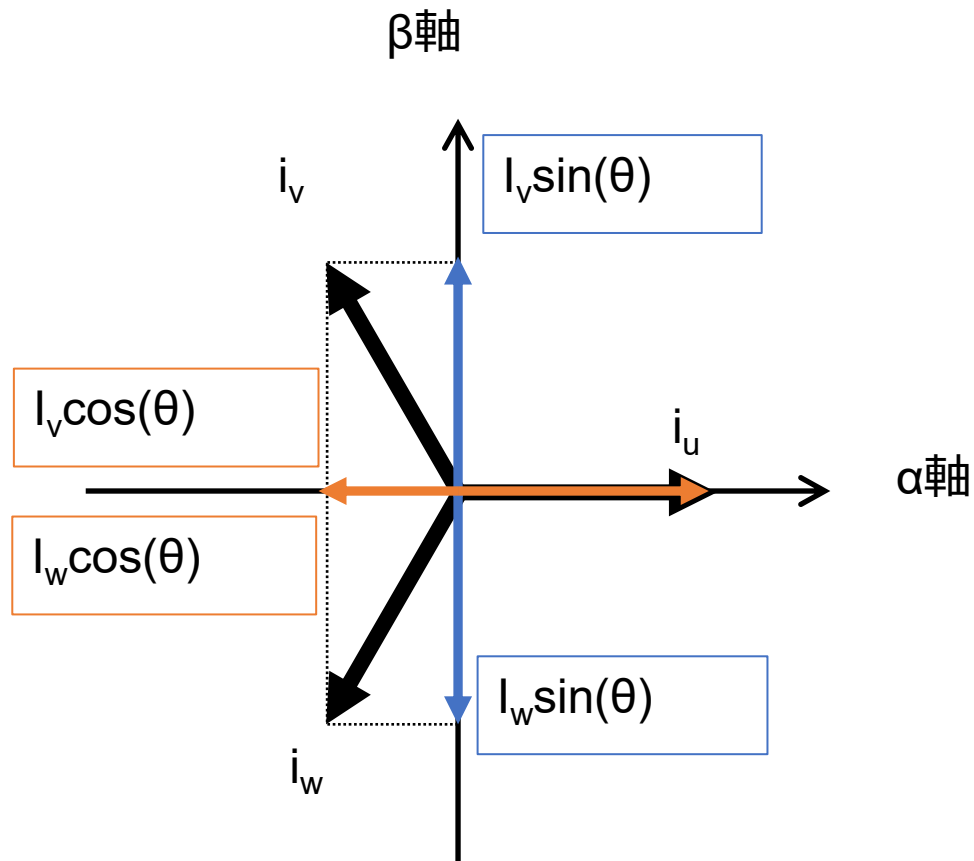
- $\alpha\beta$ 変換の式は本来, α 相と β 相, 零相の三相からなる。しかし, 零相電流 i_0 は

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_u + i_v + i_w)$$

であるため, 中性線のないY結線では零相電流は常に0となる。

したがって, モータ制御では零相電流は無視して α 相と β 相のみで変換式を構築する。

相電流の $\alpha\beta$ 変換



- 左図よりUVW相のベクトルは $\alpha\beta$ 軸に写像することにより二相に変換することができる。

$$\begin{cases} i_\alpha = i_u + i_v \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_w \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ i_\beta = i_u \cdot 0 + i_v \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_w \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix}$$

絶対変換

前ページにて三相を二相に変換できたが、物理量が保存されているか不明である。ここでは変換前後で電力が一致するか確認し、一致しないようであれば一致するように式を調節する。

$\alpha\beta$ 座標上の電流 i と電圧 v はそれぞれ次のような行列として考える。

$$i = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}$$

このとき、瞬時電力 P は次のように表される。

$$\begin{aligned} P &= v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta \\ &= \begin{bmatrix} v_\alpha & v_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \\ &= v^T i \end{aligned}$$

絶対変換

UVWの電流*i*と電圧*v*はそれぞれ次のような行列として考える。

$$i = \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}$$

このとき、瞬時電力*P*は次のように表される。

$$\begin{aligned} P &= v_u i_u + v_v i_v + v_w i_w \\ &= \begin{bmatrix} v_u & v_v & v_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} \\ &= v^T i \end{aligned}$$

絶対変換

次にこのような電圧と電流を変換行列Cによって座標変換することを考える。変換後の電流, 電圧をそれぞれ i' と v' とすると,

$$\begin{aligned}i' &= Ci \\ v' &= Cv\end{aligned}$$

となる。したがって変換後の電力 P' は次のように表される。

$$\begin{aligned}P' &= v'^T i' \\ &= (Cv)^T Ci \\ &= v^T C^t Ci\end{aligned}$$

絶対変換

- 座標変換の前後で電力が不変と仮定すると次のように表せる。

$$P = P' = v^T i = v'^T i' = v^T C^T C i$$

すなわち, C が

$$C^T C = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を満たせば変換前後の電力は不変となる。ただし, E は単位行列を表す。

絶対変換

- P7より, 変換行列Cを

$$k \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

とおく。このとき, $C^T C = E$ を満たす k を求める。

計算すると,

$$C^T C = k^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = E$$

となるため, $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ となる。

絶対変換

- 以上の様な電力不変の変換を絶対変換と呼ぶ。以上をまとめると $\alpha\beta$ 変換の絶対変換 $C_{\alpha\beta}$ は

$$C_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

で表される。

一方で、電圧・電流の振幅を不変とする相対変換も用いられている。相対変換では $k=2/3$ となる。絶対変換は日本、相対変換は海外で主に用いられる。

本資料では日本の慣習に倣い、絶対変換を用いる。

絶対変換と相対変換における物理量

項目	絶対変換	相対変換
変換係数	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$
電力・トルク	変換前後で不変	変換前の $\frac{2}{3}$ 倍
振幅	変換前の $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍	変換前後で不変
変換後の鎖交磁束	鎖交磁束実効値の $\sqrt{3}$ 倍	鎖交磁束振幅
$\sqrt{v_d^2 + v_q^2}$	線間電圧実効値	相電圧振幅
$\sqrt{i_d^2 + i_q^2}$	電流実効値の $\sqrt{3}$ 倍	電流振幅

相電流以外の $\alpha\beta$ 変換について

- これまで，例として相電流の $\alpha\beta$ 変換に着目したが，電圧も同様に計算が可能である。
- 相電流と同様に，三相座標系の物理量に変換行列を左から乗じることで $\alpha\beta$ 座標系の物理量を導出する。

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = C_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{pmatrix}$$



三相座標系の電圧方程式を $\alpha\beta$ 座標系に変換する

前回の資料より，三相座標系の電圧方程式は以下の式で表される。

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_u & pM_{uv} & pM_{wu} \\ pM_{uv} & R_a + pL_v & pM_{vw} \\ pM_{wu} & pM_{vw} & R_a + pL_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega\Psi_f \sin \theta \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix}$$

したがって， $\alpha\beta$ 変換を行うと以下の様になる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} &= C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \\ &= C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} R_a + pL_u & pM_{uv} & pM_{wu} \\ pM_{uv} & R_a + pL_v & pM_{vw} \\ pM_{wu} & pM_{vw} & R_a + pL_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} -\omega\Psi_f \sin \theta \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三相座標系の電圧方程式をαβ座標系に変換する

$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$ の形に持っていくように式変形すると以下の式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} &= C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} R_a + pL_u & pM_{uv} & pM_{wu} \\ pM_{uv} & R_a + pL_v & pM_{vw} \\ pM_{wu} & pM_{vw} & R_a + pL_w \end{bmatrix} C_{\alpha\beta}^T C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} -\omega\Psi_f \sin \theta \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} \\ &= \left(C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} R_a + pL_u & pM_{uv} & pM_{wu} \\ pM_{uv} & R_a + pL_v & pM_{vw} \\ pM_{wu} & pM_{vw} & R_a + pL_w \end{bmatrix} C_{\alpha\beta}^T \right) \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} -\omega\Psi_f \sin \theta \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \\ -\omega\Psi_f \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三相座標系の電圧方程式を $\alpha\beta$ 座標系に変換する

各相の自己インダクタンスが等しい場合，この式を計算すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_a & 0 \\ 0 & R_a + pL_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega\psi_a \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

ただし， $L_a = \frac{3}{2}L_u$ ， $\psi_a = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_f$ である。

まとめ

- 本資料ではαβ変換と三相座標系をαβ変換した式を導出した。

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_a & 0 \\ 0 & R_a + pL_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega\psi_a \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$