

ハレバツハモータの理論

dq座標系におけるモータの電圧方程式を導出する

各座標系の表現

三相

静止座標系

- UVW相
- 指令電圧, 測定電圧はこの形式となる

二相

静止座標系

- α 軸および β 軸による表現
- UVWと同じく, 軸の位置はロータの回転によらず静止している

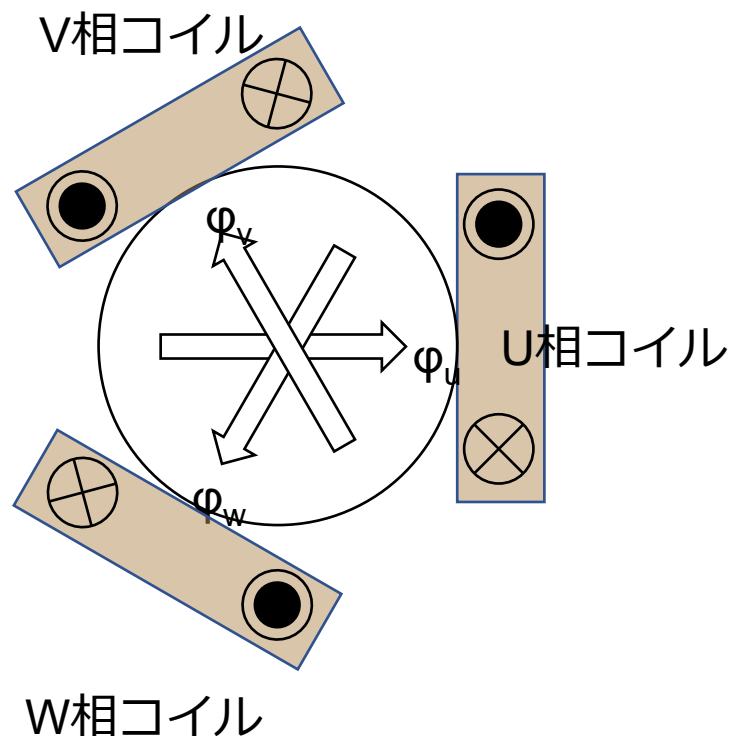
二相

回転座標系

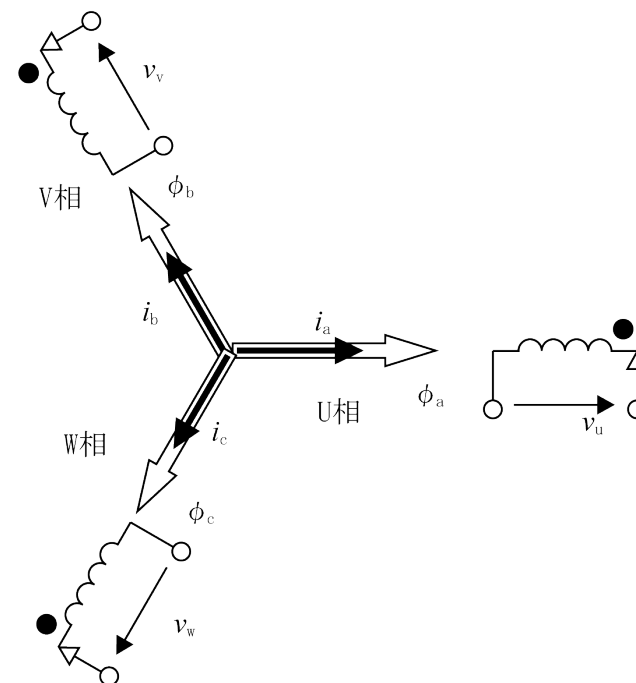
- d 軸および q 軸による表現
- ロータの回転速度と同期している

三相座標系（空間ベクトル表現）

コイルと起磁力の関係

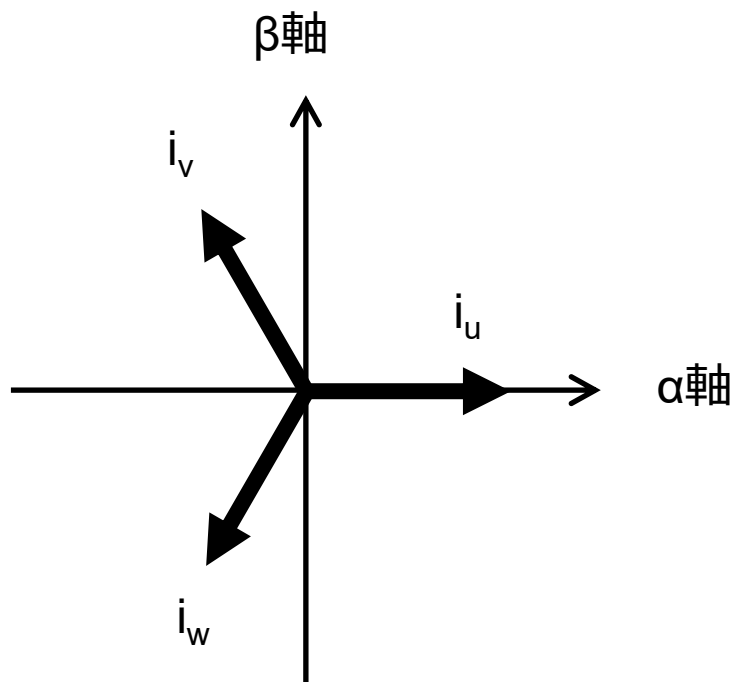


空間ベクトル表現

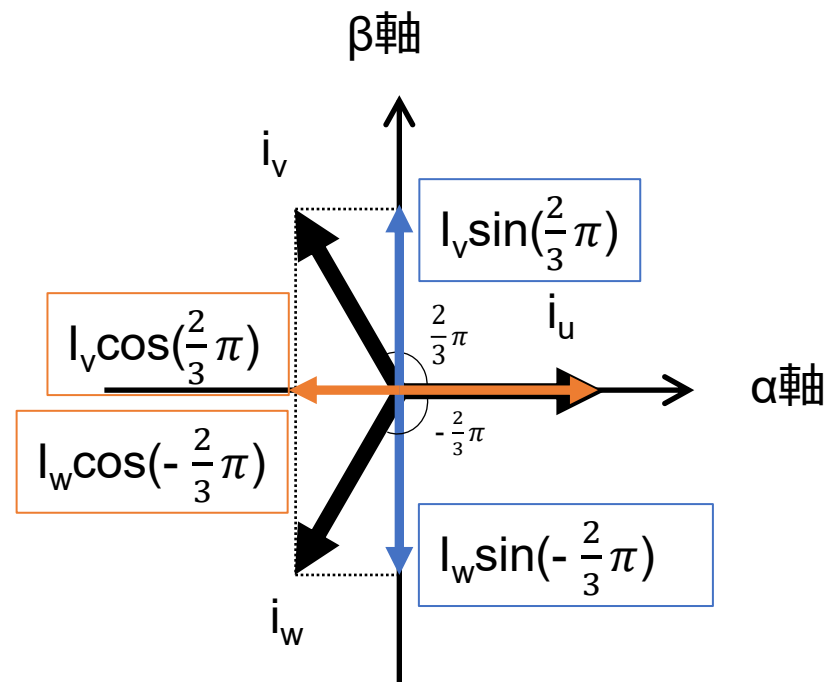


三相座標系から $\alpha\beta$ 変換

三相静止座標系のベクトル図



各ベクトルの $\alpha\beta$ 座標系への射影

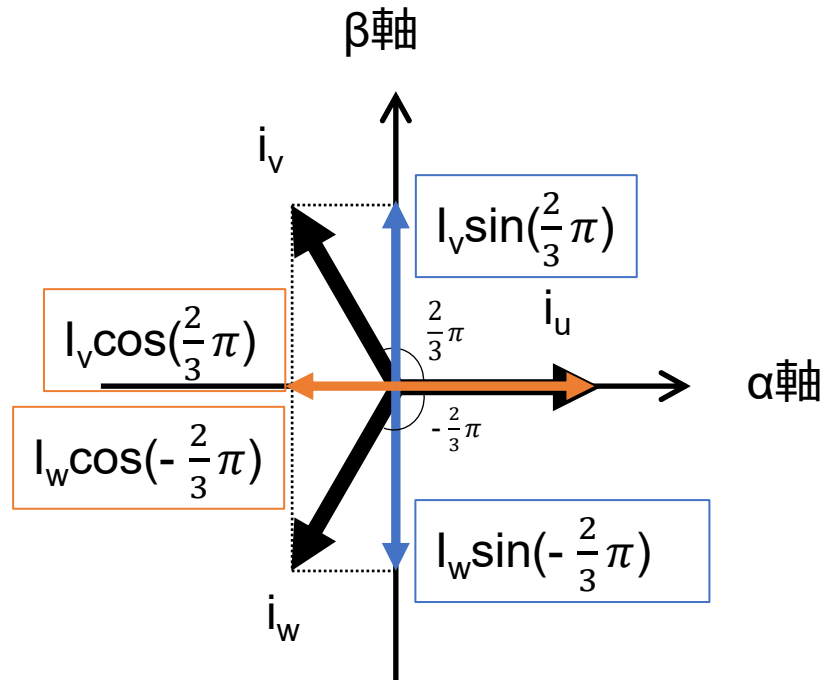


$$I_\alpha = i_u + I_v \cos(\frac{2}{3}\pi) + I_w \cos(-\frac{2}{3}\pi)$$

$$I_\beta = 0 + I_v \sin(\frac{2}{3}\pi) + I_w \sin(-\frac{2}{3}\pi)$$

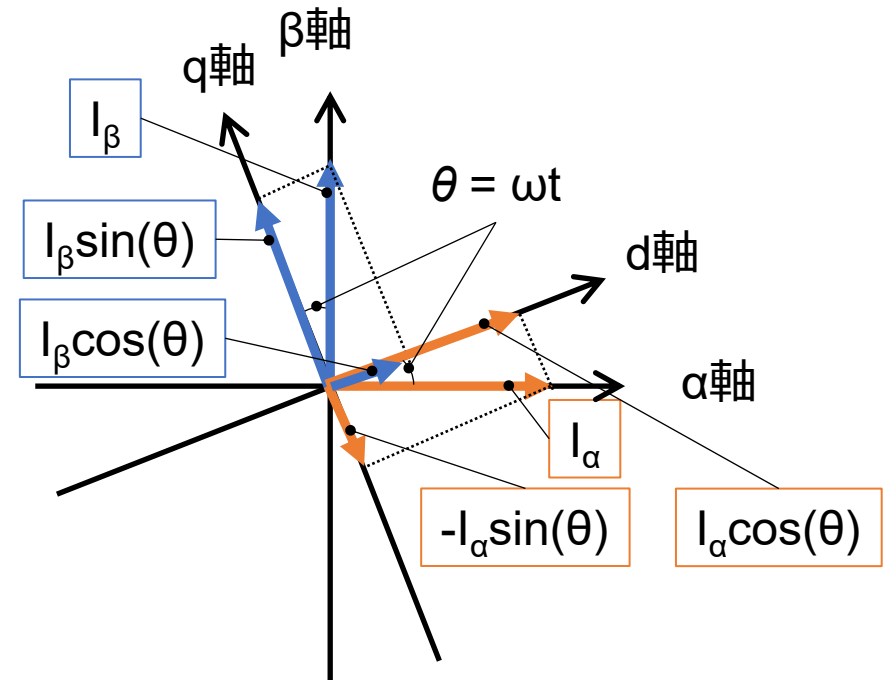
$\alpha\beta$ 変換とdq変換の変換過程

三相座標系から $\alpha\beta$ 座標系への射影



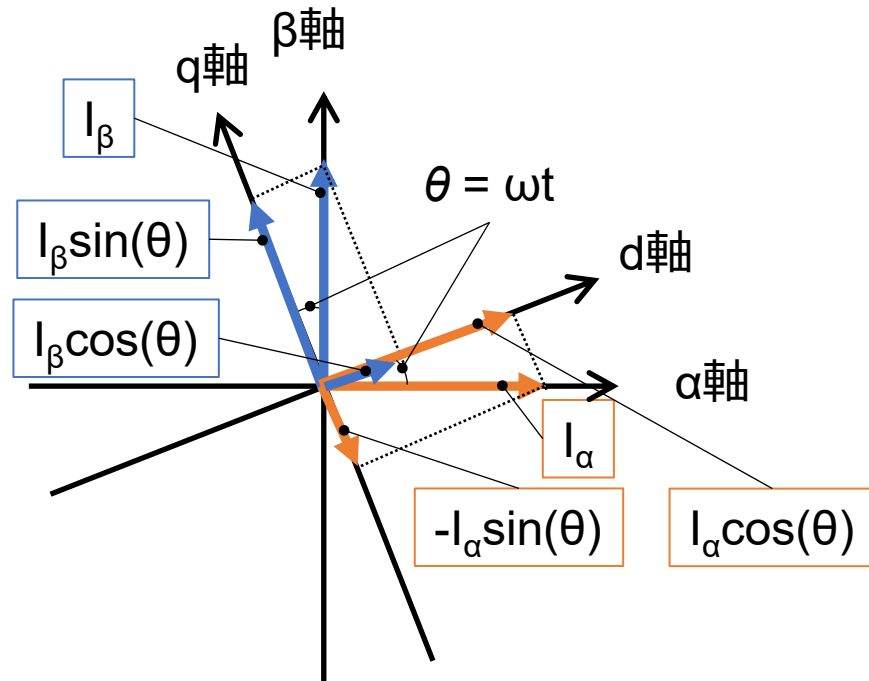
$$I_\alpha = i_u + I_v \cos(\frac{2}{3}\pi) + I_w \cos(-\frac{2}{3}\pi)$$
$$I_\beta = 0 + I_v \sin(\frac{2}{3}\pi) + I_w \sin(-\frac{2}{3}\pi)$$

$\alpha\beta$ 座標系からdq座標系への射影



$$I_d = I_\alpha \cos(\theta) + I_\beta \sin(\theta)$$
$$I_q = -I_\alpha \sin(\theta) + I_\beta \cos(\theta)$$

dq変換行列



$$I_d = I_\alpha \cos(\theta) + I_\beta \sin(\theta)$$
$$I_q = -I_\alpha \sin(\theta) + I_\beta \cos(\theta)$$

dq座標系は回転子に同期して回転するため、 $\alpha\beta$ 座標系との位置関係は左図となる。また、 $\alpha\beta$ 座標系の物理量をdq座標系に射影すると、以下の方程式を得る。

- $I_d = I_\alpha \cos(\theta) + I_\beta \sin(\theta)$
- $I_q = -I_\alpha \sin(\theta) + I_\beta \cos(\theta)$

すなわち、 $\alpha\beta$ 座標系からdq座標系への変換行列 C_{dq} は以下に表現できる

$$C_{dq} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

変換前後の物理量保存の確認

- $\alpha\beta$ 変換の際は変換前後で電力が変化しないように絶対変換を行った。

$$C_{\alpha\beta} = k \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

dq変換の際も変換前後で電力が変化しないか確認する。

変換前後の物理量保存の確認

前回のスライドより，変換行列Cが

$$C^T C = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を満たせば変換前後の電力が不変となった。

ここで，変換行列 $C_{dq} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の逆行列を考えると，

$$\begin{aligned} C_{dq}^{-1} &= \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= C_{dq}^T \end{aligned}$$

すなわち，変換行列 C_{dq} の逆行列は転置行列となる。

変換前後の物理量保存の確認

したがって、以下の式が成立する。

$$C^T C = C_{dq}^{-1} C_{dq} = E$$

すなわち、 $\alpha\beta$ 座標系の物理量をdq変換する際は変換係数 k が1となる。

以上より、 $\alpha\beta$ 座標系の物理量をdq変換する際は変換係数を考慮せずにそのまま C_{dq} を左からかければよい。

このように $C^T C = E$ が成立する行列 C をユニタリ行列と呼ぶ。

αβ座標の電圧方程式をdq変換する

αβ変換後の電圧方程式は

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_0 & 0 \\ 0 & R_a + pL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega\psi_a \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

であった。この電圧方程式に変換行列 C_{dq} を乗じてdq変換を行う。

R_a : 1相あたりの等価直列抵抗 [Ω]

θ : U相コイルの起磁力方向 (α軸) から
界磁のN極方向 (d軸) の進み角 [rad]

p : 時間微分演算子

L_0 : α軸およびβ軸コイルの自己インダクタンス [H]

$L_0 = \frac{3}{2} * 1\text{相あたりの自己インダクタンス}$

ψ_a : α軸およびβ軸コイルの最大鎖交磁束数

$\psi_a = \sqrt{\frac{3}{2}} * \text{永久磁石による最大鎖交磁束数}$

αβ座標の電圧方程式をdq変換する

αβ変換後の電圧方程式に変換行列 C_{dq} を乗じてdq変換を行う。

$$\begin{aligned} C_{dq} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} &= C_{dq} \begin{bmatrix} R_a + pL_0 & 0 \\ 0 & R_a + pL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{dq} \omega \psi_a \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= C_{dq} \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{dq} p \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{dq} \omega \psi_a \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$C_{dq} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix}$, $C_{dq} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$ となるように式変形すると以下の様に表される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} &= C_{dq} \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{dq} p \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + C_{dq} \omega \psi_a \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= C_{dq} \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + C_{dq} p \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + C_{dq} \omega \psi_a \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\alpha\beta$ 座標の電圧方程式をdq変換する

ここで、第二項に着目すると C_{dq} が $\theta = \omega t$ であるため、

$$C_{dq} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

と表すことができ、時間 t を含んでいる。時間演算子 p を処理するため積の微分公式（ライプニッツ則）により式変形する。

$$\begin{aligned} * \text{ライプニッツ則} : p\{f \cdot g\} &= p\{f\} \cdot g + f \cdot p\{g\} \\ \therefore f \cdot p\{g\} &= p\{f \cdot g\} - p\{f\} \cdot g \end{aligned}$$

$\alpha\beta$ 座標の電圧方程式をdq変換する

$$\begin{aligned} C_{dq} p \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} &= p \left\{ C_{dq} \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \right\} - p\{C_{dq}\} \begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{bmatrix} C_{dq}^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pL_a & 0 \\ 0 & pL_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L_0\omega \\ L_0\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pL_0 & -L_0\omega \\ L_0\omega & pL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より、第二項が求まった。なお、第一項および第三項は微分演算子を含まないため、上記のような配慮無く計算可能である。

* ライプニッツ則 : $p\{f \cdot g\} = p\{f\} \cdot g + f \cdot p\{g\}$
 $\therefore f \cdot p\{g\} = p\{f \cdot g\} - p\{f\} \cdot g$

$\alpha\beta$ 座標の電圧方程式をdq変換する

各項の計算結果を合わせると,

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pL_0 & -L_0\omega \\ L_0\omega & pL_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\psi_a \end{bmatrix}$$

となる。 i_d および i_q と積となる L_0 をそれぞれ L_d, L_q とすると

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + pL_d & -L_q\omega \\ L_d\omega & R_a + pL_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\psi_a \end{bmatrix}$$

となる。このとき, L_d をd軸インダクタンス, L_q をq軸インダクタンスと呼ぶ。この式がdq座標上の電圧方程式となる。